

Déterminer des images et des antécédents

Cours p. 266

Questions flash

- On donne $f(x) = \frac{1+x}{2}$.
• Que vaut $f(3)$?
 - On donne $f: x \mapsto 4 + x^2$.
• Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?
 - On donne $g(x) = -x^3 + 3$.
Sofiane a calculé l'image de -1 par la fonction g et a trouvé 2. Son professeur lui dit qu'il s'est trompé.
• Expliquer son erreur.
 - On appelle h la fonction qui, à tout x , fait correspondre son triple.
• Donner le ou les antécédents de 15 par la fonction h .
 - f est une fonction telle que $f(-3) = 4$.
Traduire cette égalité par une phrase comportant :
a. le mot « image » ; b. le mot « antécédent ».
 - Traduire les phrases suivantes par une égalité.
a. « L'image de 3 par la fonction f est -5. »
b. « -4 est un antécédent de 7 par la fonction g . »
 - On appelle g la fonction qui, à tout x , fait correspondre son double.
• Quelle est l'image de -3 par la fonction g ?
 - Vrai ou faux ?**
Si j est une fonction telle que $j(5) = -2$, alors :
a. 5 est l'image de -2 par la fonction j ;
b. -2 est l'image de 5 par la fonction j ;
c. 5 a pour image -2 par la fonction j ;
d. -2 a pour image 5 par la fonction j .
 - On donne $f(x) = 2x^2$.
• Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
- | x | 0 | -1 | 2 | -2 |
|--------|---|----|---|----|
| $f(x)$ | | | | |
- On donne le tableau de valeurs suivant.
- | x | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|--------|-----|------|----|-----|------|-----|
| $h(x)$ | 5,3 | 2 | -2 | -1 | -3,5 | 2 |
- Quelle est l'image de 0,5 par la fonction h ?
 - Quelle est l'image de -1 par la fonction h ?
 - Donner un antécédent de -3,5 par la fonction h .

11 Vrai ou faux ?

Si g est une fonction telle que $g(2) = 6$, alors :
 a. 2 est un antécédent de 6 par la fonction g ;
 b. 6 est un antécédent de 2 par la fonction g ;
 c. 2 est une solution de l'équation $g(x) = 6$;
 d. 6 a pour antécédent 2 par la fonction g .

12 On donne $f: x \mapsto x^2 - 2$.

• Relier chaque nombre du nuage A à son image dans le nuage B.



13 Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Égalité	Verbe « avoir »	Verbe « être »
$f(2) = 4$	2 a pour image 4 par f . 4 a pour antécédent 2 par f .	4 est l'image de 2 par f . 2 est un antécédent de 4 par f .
...	2,5 a pour image -2 par h	...
...	...	5 est un antécédent de 3 par g .

14 On donne le programme de calcul suivant.

On choisit un nombre x .
 On le multiplie par 2.
 On ajoute 5 au résultat.
 On obtient un nombre $h(x)$.

- Exprimer $h(x)$ en fonction de x .
- Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par la fonction h ?
- Donner le ou les antécédents de 9 par la fonction h .

Tracer la représentation graphique d'une fonction

Cours p. 267

Questions flash

15 La fonction g est définie par $g(x) = \frac{4}{x}$.

• Le point A de coordonnées (4 ; 1) et le point B de coordonnées (1 ; 0) appartiennent-ils à la représentation graphique de g ?

Lors d'un championnat de lancer de poids, Igor a fait étudier l'un de ses lancers par un de ses amis mathématicien. Il a trouvé la fonction h suivante qui donne la hauteur du poids (en mètres) en fonction du temps x (en secondes) :

$$h(x) = -5x^2 + 6,75x + 2 \text{ pour } x \text{ compris entre } 0 \text{ et } 1,6.$$

1. L'instant $x = 0$ correspond au moment où Igor lance son poids. À quelle hauteur le poids se trouve-t-il à cet instant ?
2. Calculer l'image de 1,6 par la fonction h . Donner une interprétation concrète de ce résultat.
3. Compléter le tableau suivant :

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6
$h(x)$					

4. On souhaite représenter graphiquement la hauteur du poids en fonction du temps. Dans un repère ayant pour unités 1 centimètre pour 0,1 seconde en abscisses et 5 centimètres pour 1 mètre en ordonnées, placer les points correspondant au tableau précédent.
5. Comment peut-on compléter ce graphique ?



Sécurité routière

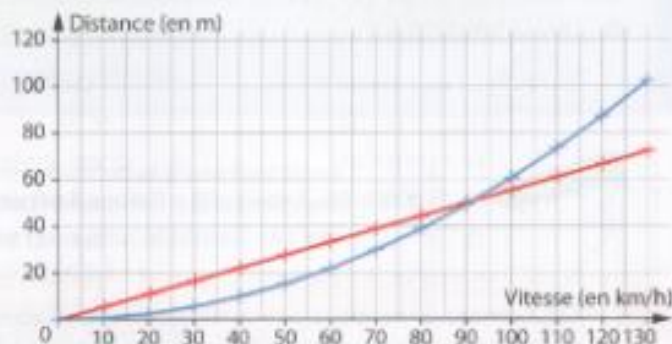
Activité
4

Le document ci-contre explique comment calculer la distance d'arrêt d'un véhicule après que son conducteur a perçu un obstacle.

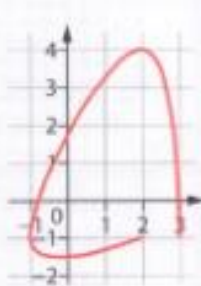
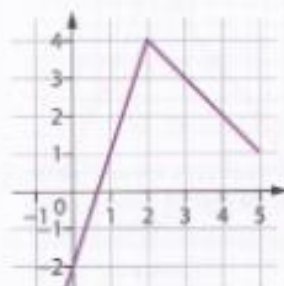
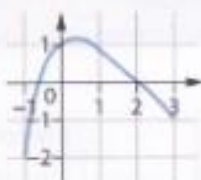
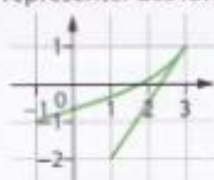
- Le **temps de réaction** est le temps qui s'écoule entre le moment où le conducteur perçoit un danger et celui où il commence à freiner. On supposera que ce temps est égal à 2 secondes.
- La **distance de freinage** est la distance parcourue par le véhicule entre le moment où le conducteur commence à freiner et le moment où le véhicule s'arrête.
- La **distance d'arrêt** est la somme de la distance parcourue pendant le temps de réaction et de la distance de freinage :

$$D_A = D_R + D_F$$

1. Les deux courbes ci-contre représentent la distance de réaction D_R et la distance de freinage D_F en fonction de la vitesse, pour la voiture de Muriel sur une route sèche en bon état. Identifier chacune de ces courbes.
2. Muriel roule à 60 km/h sur cette route. Quelle est sa distance d'arrêt ?
3. Un peu plus tard, Muriel s'arrête brusquement après avoir vu un animal traverser la route. Elle constate qu'elle a parcouru 100 mètres après avoir vu l'animal. Quelle était sa vitesse ?
4. Sur autoroute, les lignes délimitant la bande d'arrêt d'urgence mesurent 38 mètres et sont espacées entre elles de 14 mètres. Comment expliquer la signalisation ci-contre ?



- 16 Parmi les courbes suivantes, lesquelles peuvent représenter des fonctions ?



- 17 La fonction f est définie par $f(x) = 5 - x^2$ pour des valeurs de x comprises entre -3 et 3 .

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

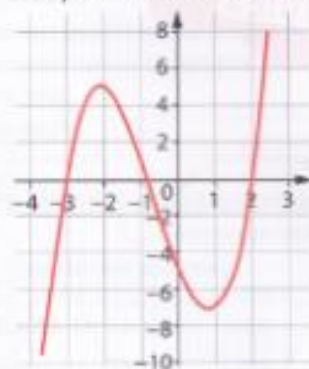
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère.

- 18 La fonction h est définie par $h(x) = 2 + \frac{x}{2}$ pour des valeurs de x comprises entre -1 et 1 .

• Tracer la courbe représentative de h .

- 20 Voici la courbe représentative d'une fonction g .



• Est-il vrai que $g(-3) = g(2)$?

- 21 Voici la courbe d'une fonction f définie pour des valeurs de x comprises entre -7 et 4 .



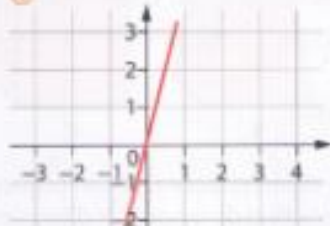
Déterminer graphiquement, quand c'est possible :

- l'image de -1 ;
- un antécédent de 2 ;
- $f(-6)$;
- des antécédents de 1 ;
- un nombre qui a pour image 3 ;
- un nombre qui a pour antécédent 2 ;
- une solution de l'équation $f(x) = 0$.

- 22 Voici trois courbes et trois expressions de fonctions.

• Relier chaque courbe à l'expression qui convient.

①

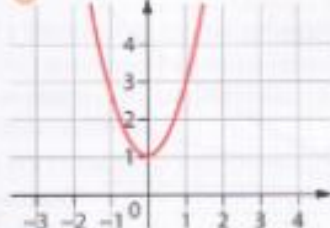


a. $f(x) = x^2 + 1$

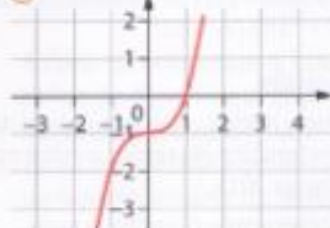
b. $g(x) = x^3 - 1$

c. $h(x) = 4x$

②



③

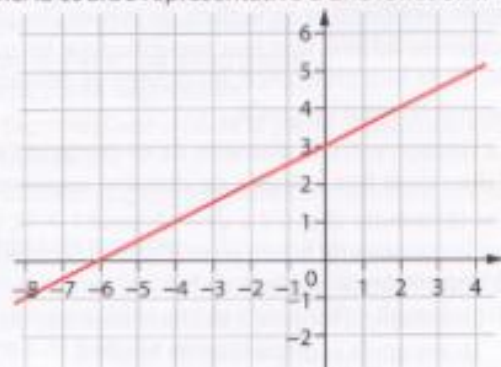


Exploiter la représentation graphique d'une fonction

Cours p. 267

Questions flash

- 19 Voici la courbe représentative d'une fonction f .

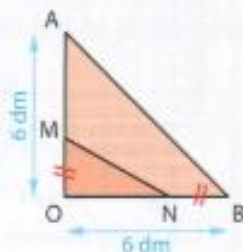


- Donner l'image de 2 par la fonction f .
- Donner un antécédent de 0 par la fonction f .
- Donner la valeur de $f(0)$; $f(-2)$; $f(-6)$.

Problèmes

33 Menuiserie

Un menuisier dispose d'une pièce de bois en forme de triangle rectangle isocèle de côté 6 dm (OAB sur la figure). Il doit la scier pour obtenir deux pièces comme indiqué sur la figure. Le triangle OMN doit avoir une aire de 3 dm^2 et les longueurs OM et NB doivent être égales. Il veut savoir où placer les points M et N pour faire la découpe.



1. Test avec des valeurs entières de OM

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

Longueur OM	0	1	2	3	4	5	6
Longueur ON		5					
Aire de OMN		2,5					

A-t-on déjà trouvé une solution au problème posé ?
Peut-on proposer une conjecture ?

2. Exploitation du problème au tableau

On a rempli la feuille de calcul ci-dessous.

a. Quelle formule a-t-on écrite dans la cellule B2 ? dans la cellule C2 ?

b. En recopiant les formules vers le bas, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	OM	ON	Aire (OMN)		OM	ON	Aire (OMN)		OM	ON	Aire (OMN)
2	C										
3	0,1	5,9	0,295		2,1	3,9	4,095		4,1	1,9	3,895
4	0,2	5,8	0,59		2,2	3,8	4,18		4,2	1,8	3,78
5	0,3	5,7	0,855		2,3	3,7	4,255		4,3	1,7	3,655
6	0,4	5,6	1,12		2,4	3,6	4,32		4,4	1,6	3,52
7	0,5	5,5	1,375		2,5	3,5	4,375		4,5	1,5	3,375
8	0,6	5,4	1,62		2,6	3,4	4,42		4,6	1,4	3,22
9	0,7	5,3	1,855		2,7	3,3	4,455		4,7	1,3	3,055
10	0,8	5,2	2,08		2,8	3,2	4,48		4,8	1,2	2,88
11	0,9	5,1	2,295		2,9	3,1	4,495		4,9	1,1	2,695
12	1				3				5		
13	1,1	4,9	2,495		3,1	2,9	4,495		5,1	0,9	2,295
14	1,2	4,8	2,688		3,2	2,8	4,48		5,2	0,8	2,08
15	1,3	4,7	2,855		3,3	2,7	4,455		5,3	0,7	1,855
16	1,4	4,6	3,02		3,4	2,6	4,42		5,4	0,6	1,62
17	1,5	4,5	3,175		3,5	2,5	4,375		5,5	0,5	1,375
18	1,6	4,4	3,32		3,6	2,4	4,32		5,6	0,4	1,12
19	1,7	4,3	3,455		3,7	2,3	4,255		5,7	0,3	0,855
20	1,8	4,2	3,58		3,8	2,2	4,18		5,8	0,2	0,58
21	1,9	4,1	3,695		3,9	2,1	4,095		5,9	0,1	0,295
22	2				4				6		

Peut-on faire maintenant une autre conjecture ?

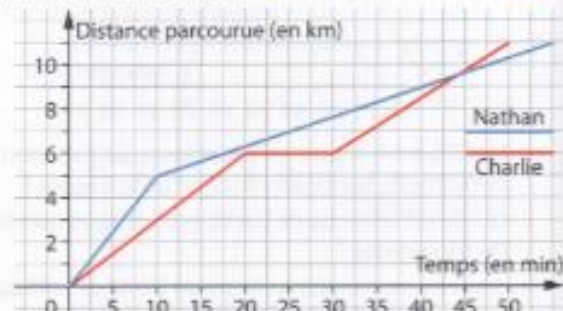
3. À l'aide d'une fonction

On pose $x = OM$ et on note $\mathcal{A}$ la fonction qui à x (en dm) associe l'aire du triangle OMN (en dm^2).

- Quelles sont les valeurs que peut prendre x ?
- Exprimer la longueur ON en fonction de x .
- Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .
- Tracer le graphique de la fonction $\mathcal{A}$.
Prendre comme échelle : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.
- Mettre la solution au problème posé en évidence sur le graphique en traçant des pointillés.

34 Course cycliste

Nathan et Charlie ont participé à une course cycliste. Le départ avait lieu au collège et l'arrivée à la mairie. Les courbes ci-dessous illustrent leur course.



À partir de ces données, trouver :

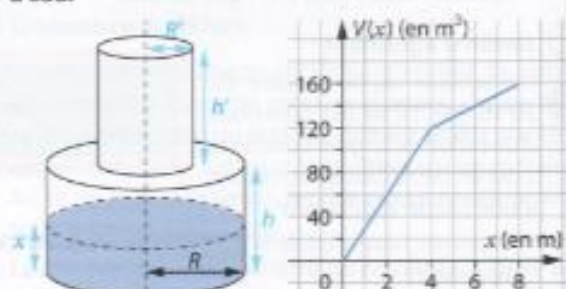
- la distance parcourue pendant cette course ;
- qui est parti le plus vite au départ ;
- qui s'est arrêté un peu au niveau de l'église ;
- la distance entre le collège et l'église ;
- qui était en tête au bout d'une demi-heure ;
- qui a doublé qui et à quel(s) moment(s) ;
- qui est arrivé le premier.

35 Réservoir d'eau

Une cuve d'une hauteur totale de 8 mètres est formée d'un cylindre de rayon R et de hauteur h , surmonté d'un second cylindre de rayon R' et de hauteur h' .

On note x la hauteur d'eau (en mètres) depuis la base.

On a représenté ci-dessous le volume d'eau $V(x)$ (en mètres cube) dans la cuve en fonction de la hauteur d'eau.



- Retrouver les hauteurs, volumes et rayons des deux cylindres, au centième près.

36 Une courbe pour deux problèmes

- Représenter la fonction $x \mapsto x^3$ pour des valeurs de x comprises entre 0 et 2.
- Déterminer les dimensions d'un cube de volume 5 cm^3 .
- Déterminer le rayon d'une boule de volume 3 litres.

23 La rando

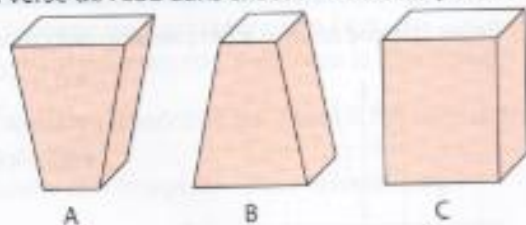
EPS Cette courbe représente l'altitude d'un randonneur en fonction du temps.



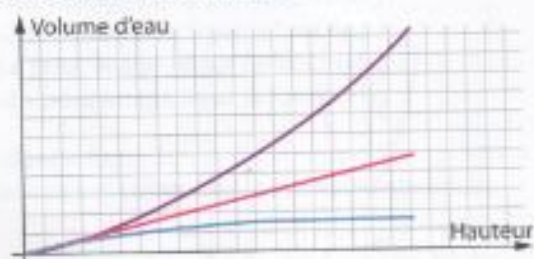
- Combien de temps dure la randonnée ?
- À quelle altitude se trouve le randonneur au bout de trois heures de randonnée ?
- Existe-t-il des moments pendant lesquels le randonneur se trouve aux altitudes suivantes :
a. 1 000 m ? b. 200 m ? c. 1 400 m ?
Si oui, lesquels ?

24 Ça monte !

On verse de l'eau dans chacun de ces récipients.



On a représenté ci-dessous, pour chaque récipient, le volume d'eau en fonction de la hauteur d'eau versée.

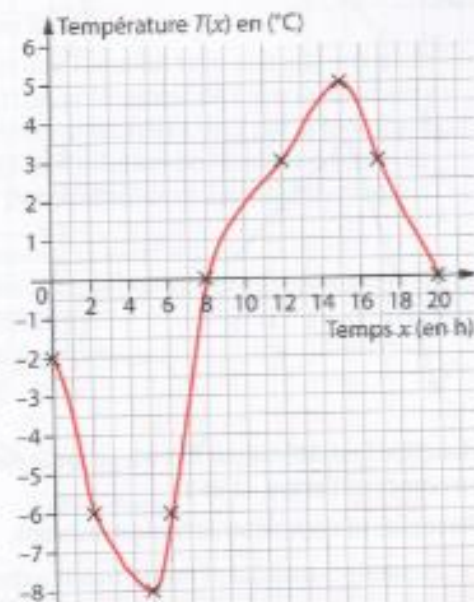


- Associer chaque récipient à la courbe correspondante.

25 Relever la température

À l'aide de sa station météo, Jessie a enregistré la température $T(x)$ en fonction du temps x entre minuit et 20 heures le 9 février 2015.

La fonction T est représentée ci-après.



- Quelle était la température à midi ce jour-là ?
- Lire graphiquement $T(17)$.
Que représente cette valeur ?
- Résoudre graphiquement l'équation $T(x) = 0$.
Que représentent la ou les solutions trouvées ?
- Résoudre graphiquement l'inéquation $T(x) \geq 3$.
Que représentent la ou les solutions trouvées ?
- Donner l'image de 0 par la fonction T .
Que représente cette valeur ?
- Donner le ou les antécédents de -6 par la fonction T .
Que représentent ces valeurs ?
- Quand la température était-elle positive ce jour-là ?

26 Croissance du lichen

SVT Une des conséquences du réchauffement de notre planète est la fonte de certains glaciers. Douze ans après la disparition de la glace, de minuscules plantes, appelées lichens, font leur apparition sur les rochers. Au fil de leur croissance, les lichens se développent sous la forme d'un cercle.

La relation entre le diamètre de ce cercle et l'âge du lichen peut être calculée de manière approximative par la formule $d(t) = 7 \times \sqrt{t - 12}$ pour $t \geq 12$, où $d(t)$ est le diamètre du lichen en millimètres t années après la disparition de la glace.

- En utilisant la formule, calculer le diamètre du lichen 16 ans après la disparition de la glace.
- Anne a mesuré le diamètre d'un lichen et a trouvé 42 millimètres.
Depuis combien d'années la glace a-t-elle disparu à cet endroit précis ?

D'après PSA.

37 Beaucoup de bruit pour rien

Le graphique ci-dessous donne le niveau de bruit (en décibels) d'une tondeuse à gazon en marche, en fonction de la distance (en mètres) entre la tondeuse et l'endroit où s'effectue la mesure.



En utilisant ce graphique, répondre aux deux questions suivantes. *Aucune justification n'est attendue.*

1. Quel est le niveau de bruit à une distance de 100 mètres de la tondeuse ?
2. À quelle distance de la tondeuse se trouve-t-on quand le niveau de bruit est égal à 60 décibels ?

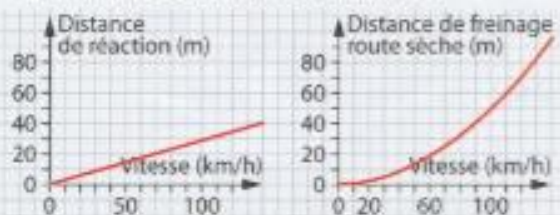
D'après DNB Polynésie, 2015.

38 Freinage

La distance parcourue par un véhicule entre le moment où le conducteur voit un obstacle et l'arrêt complet du véhicule est schématisée ci-dessous.



1. Un scooter roulant à 45 km/h freine en urgence pour éviter un obstacle. À cette vitesse, la distance de réaction est égale à 12,5 m et la distance de freinage à 10 m. Quelle est la distance d'arrêt ?
2. Les deux graphiques ci-dessous représentent, dans des conditions normales et sur route sèche, la distance de réaction et la distance de freinage en fonction de la vitesse du véhicule.



En utilisant ces graphiques, répondre aux questions suivantes.

- a. La distance de réaction est de 15 m. À quelle vitesse roule-t-on ? *Aucune justification n'est attendue.*
 - b. La distance de freinage du conducteur est-elle proportionnelle à la vitesse de son véhicule ?
 - c. Déterminer la distance d'arrêt pour une voiture roulant à 90 km/h.
3. La distance de freinage en mètres d'un véhicule sur route mouillée peut se calculer à l'aide de la formule suivante, où v est la vitesse en km/h du véhicule.
- $$\text{Distance de freinage sur route mouillée} = \frac{v^2}{152,4}$$
- Calculer, au mètre près, la distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h.

D'après DNB Métropole - Antilles - Guyane, 2015.

39 En musique

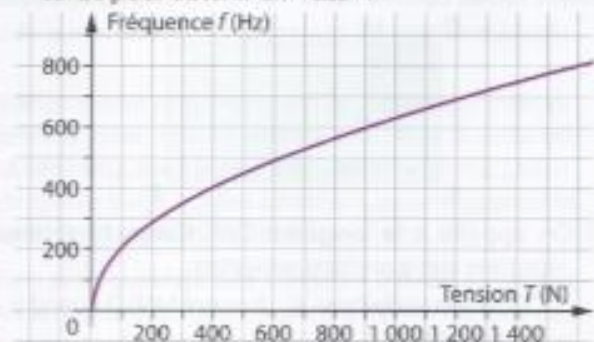
Une corde de guitare est soumise à une tension T , exprimée en Newton (N), qui permet d'obtenir un son quand la corde est pincée.

Ce son plus ou moins aigu est caractérisé par une fréquence f exprimée en Hertz (Hz). La fonction qui, à une tension T , associe sa fréquence est définie par $f(T) = 20\sqrt{T}$.

Tableau des fréquences (en Hertz) de différentes notes de musique

Notes	Do2	Ré2	Mi2	Fa2	Sol2	La2	Si2
Fréquences	132	148,5	165	176	198	220	247,5
Notes	Do3	Ré3	Mi3	Fa3	Sol3	La3	Si3
Fréquences	264	297	330	352	396	440	495

1. À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction f pour des valeurs de T entre 0 et 1600.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de cette fonction. Déterminer graphiquement une valeur approchée de la tension à appliquer sur la corde pour obtenir un « La3 ».

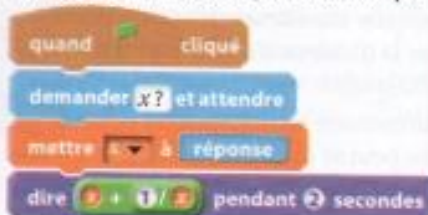


3. Déterminer par le calcul la note obtenue si on pince la corde avec une tension de 220 N environ.
4. La corde casse lorsque la tension est supérieure à 900 N. Quelle fréquence maximale peut-elle émettre avant de casser ?

D'après DNB Asie, 2014.

40 Calcul d'image

Slimane a rédigé le script ci-dessous pour calculer l'image de n'importe quel nombre par une fonction f .



1. Écrire la formule de $f(x)$ en fonction de x .
2. Peut-on calculer l'image de n'importe quel nombre x ? Pourquoi?

41 Tableau de valeurs

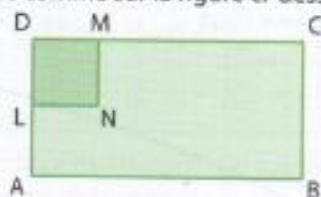
Marion a écrit le script suivant.



1. Expliquer ce que fait ce script à l'aide d'une fonction f que l'on précisera.
2. Écrire dans un tableau les valeurs affichées. Peut-on simplifier l'expression de $f(x)$?

42 Carré dans rectangle

Raoul et Alberta ont un jardin qui a une forme rectangulaire de 6 m sur 3 m. Raoul veut y faire un potager de forme carrée comme sur la figure ci-dessous.



1. On appelle x la longueur DM . Conjecturer les réponses aux questions suivantes.
 - a. Comment varie l'aire $\mathcal{A}_C$ du carré $MNLD$ quand x augmente?
 - b. Comment varie l'aire $\mathcal{A}_H$ de l'hexagone $ABCMNL$ quand x augmente?
 - c. Comment varie le périmètre $\mathcal{P}_C$ du carré $MNLD$ quand x augmente?
 - d. Comment varie le périmètre $\mathcal{P}_H$ de l'hexagone $ABCMNL$ quand x augmente?

2. a. Réaliser une figure avec un logiciel de géométrie dynamique de manière à pouvoir déplacer le point M sur le segment $[DC]$.
 - b. Faire afficher les valeurs de $\mathcal{A}_C$, $\mathcal{A}_H$, $\mathcal{P}_C$ et $\mathcal{P}_H$. Les conjectures du 1. semblent-elles cohérentes?
3. Alberta demande à son mari de lui laisser les trois quarts du jardin pour une pelouse. Proposer une solution.

43 Salle de spectacle

Le directeur d'une salle de spectacle de 8 000 places organise un concert. Il souhaite fixer le prix du billet pour gagner le plus d'argent possible (recette maximale). Une étude de marché lui apprend que :

- si le prix du billet est de 50 €, il en vend 3 000 ;
- chaque baisse de 0,60 € sur le prix du billet lui permet de vendre 100 billets supplémentaires.

Il souhaite déterminer le prix du billet afin que la recette soit maximale. Pour cela, il s'aide de la feuille de calcul ci-dessous.

	A	B	C	D
	Nombre de baisses	Prix du billet	Nombre de billets vendus	Recette
1				
2	0	50	3 000	150 000
3	1	49,40	3 100	153 140
4	2	48,80	3 200	156 160
5	3	48,20	3 300	159 060
6	4	47,60	3 400	161 840
7	5	47,00	3 500	164 500
8	6	46,40	3 600	167 040
9	7	45,80	3 700	169 460

1. Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule D2 pour obtenir ces résultats par recopie vers le bas?
2. Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule B3 pour obtenir ces résultats par recopie vers le bas?
3. Quelle formule a-t-il entrée dans la cellule C3 pour obtenir ces résultats par recopie vers le bas?
4. Réaliser cette feuille de calcul dans un tableur et apporter une réponse au problème posé.

